5. Gaia: Partikula sistemen DINAMIKA

Tipler eta Mosca:	8 eta 9 kapituluak
Fisika Orokorra:	7. kapitulua
Ohanian:	10. kapitulua

Aritz Leonardo

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Sarrera

- Orain arte partikula bakar baten dinamika aztertu dugu. Hurrengo pausua 2 partikula edo gehiago daudenean (partikula sistema bat) zer gertatuko den jakitea da.
- Edozein materia makroskopiko puxka partikula anitzez osatuta dago (elektroiak, protoiak...). Solido osoa puntu berezi batekin ordezkatuko dugu eta berorren dinamika aztertu.
- Partikula sistema baten higidura ekuazioak sarritan ebazteko zailegiak izan daitezke, horregatik, garrantzitsua da kontserbazio legeetatik abiatuta eta sistemei aplikatuz, ahalik eta informazio geheien lortzea.

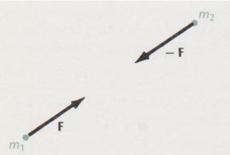
Partikula sistema baten momentua: kontserbazio legea

Partikula bakar baten momentua: $\vec{p} = m\vec{v}$. N partikuladun sistema izanez gero, partikula bakoitzaren momentua gehitu behar da:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n$$

2 partikuladun sistema

Bi partikula hauek beste edozein kanpoko indar batetik isolatuta daudela suposatuko dugu. Bata besteari egindako (barne) indarrak egon daitezke ordea, Newton-en hirugarren legeari esker badakigu berdinak eta aurkako noranzkoan izango direla.



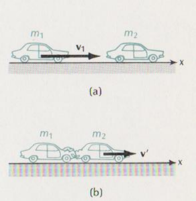
$$\text{Newton} \begin{cases} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F} \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\vec{F} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$$

hau da, $\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \text{konstante}}$

Oharra: emaitza hau N-partikuladun sistema isolatura orokortu daiteke, binaka indarrak beti deuseztatzen direlako! $\Rightarrow$ sistema osoaren $\vec{P} =$kte.

Talkak

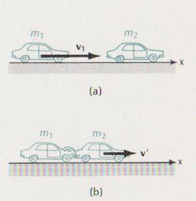
Adibidea 1: 1500 kg-ko kotxe bat 25 m/s-ko abiadura du eta geldi dagoen kotxe baten aurka jotzen du. Talka eta gero 2 kotxeak batera geratu badira zein izango da txatarraren abiadura?



Adibidea 2: Masa bereko 2 billar bola talka egiten dute. Gertatu aurretik, lehengo bola 0.3 m/s-ko abiadurarekin gerturatzen da geldi dagoen 2. bolarengana. Talka ostean lehengo bolak 0.26 m/s abiaduraz aldegiten du 30º angelu batean. Zein izango da 2. bolaren abiadura?

Talkak

Adibidea 1: 1500 kg-ko kotxe bat 25 m/s-ko abiadura du eta geldi dagoen kotxe baten aurka jotzen du. Talka eta gero 2 kotxeak batera geratu badira zein izango da txatarraren abiadura?



$$P_x^a = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1 + 0$$

$$P_x^b = m_1 v_1' + m_2 v_2' = (m_1 + m_2) v'$$

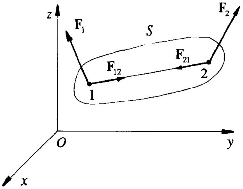
Momentuaren balioa ez da aldatuko talkan $P_x^a = P_x^b$

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 12.5$ m/s

Adibidea 2: Masa bereko 2 billar bola talka egiten dute. Gertatu aurretik, lehengo bola 0.3 m/s-ko abiadurarekin gerturatzen da geldi dagoen 2. bolarengana. Talka ostean lehengo bolak 0.26 m/s abiaduraz aldegiten du 30º angelu batean. Zein izango da 2. bolaren abiadura?

$$\text{Aurretik} \begin{cases} P_x = m_1 v_{1,x} \\ P_y = 0 \end{cases} \qquad \text{Ostean} \begin{cases} P_x = m_1 v'_{1,x} + m_2 v'_{2,x} \\ P_y = m_1 v'_{1,y} + m_2 v'_{2,y} \end{cases}$$

Kanpo indarrak



$$\text{Newton}\begin{cases} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\vec{F} + \vec{F}_{2,\text{ext}} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F} + (-\vec{F}) + \vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots \equiv \text{Sistemaren gaineko indar erresultantea.}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \equiv \text{Sistemaren momentu lineal osoa.}$$

Oharra: 2 partikula baino gehiagoko sistemetan orokorpena berehalakoa da. $\vec{F}_{\text{ext}}$ sistemaren gaienko indar erresultantea izango delarik. Barne indarrak elkar anulatzen dira binaka.

Masa zentroa I: partikula sistema diskretua

Partikula sistema baten higidura aztertu dugun bakoitzean partikula puntual batekin ordezkatu dugu. Baina nola topatu hau? non jarri? "erdian"?

Bestalde badakigu partikula anitzen sistema osoa deskribatzeko: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$ dela P eta F erresultanteak izanik. Sistema osoaren Newtonen legea da. Sistemari azelerazio bat egokitu nahi badiot, zein puntu erabili? $\Rightarrow$ Masa zentroa!

$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{MZ}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{M}} \qquad M \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$x_{\mathrm{MZ}} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)$$

$$y_{\mathrm{MZ}} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n)$$

$$z_{\mathrm{MZ}} = \frac{1}{M}(m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n)$$

Masa zentroaren higidura

Defini dezagun puntu berezi (MZ) honen abiadura:

$$\vec{v}_{\text{MZ}} = \frac{d\vec{r}_{\text{MZ}}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n\right)$$

$$M\vec{v}_{\text{MZ}} = \left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n\right)$$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{\text{MZ}}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{v}_{\text{MZ}}\right) = M\frac{d\vec{v}_{\text{MZ}}}{dt}$$

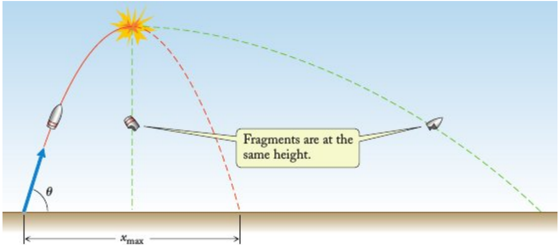
$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{MZ}}}$$

Oharra: Partikula-sistemaren momentu lineala, masa guztia masa-zentroan bildurik bailegoen kalkula daiteke.

Oharra II: Partikula sistema isolatuta badago ($\vec{F}_{\text{ext}} = 0$)$\Rightarrow$ $\vec{P} = \text{kte}$ $\vec{v}_{\text{MZ}} = \text{kte}$

Masa zentroaren higidura

A projectile is launched at some angle θ with respect to the horizontal, $0 < \theta < 90$ .Just as it reaches its peak, it explodes into two pieces. The explosion causes a first, rear piece to come to a momentary stop, and it simply drops, striking the ground directly below the peak position. The explosion also causes the speed of the second piece to increase, and it hits the ground a distance five times further from the launch point than the first piece. If the original projectile had a mass of 12.0 kg, what are the masses of the pieces?



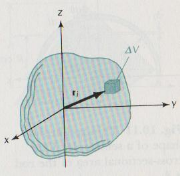
$$x_{MZ} = x_{max} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_{max}/2 + 5 m_2 x_{max}/2}{m_1 + m_2} \rightarrow m_1 = 3 m_2$$

$$m_1 + m_2 = 12.0$$

$$m_1 = 9.0\text{kg} \qquad m_2 = 3.0\text{kg}$$

Masa zentroa II: solido zurruna

Partikula sistema ez dagoenean partikula puntualez osatuta ezin dugu aurreko definizioa aplikatu. Demagun solido zurrun bat dugula, nola kalkulatu berorren MZ? Masa distribuzioa jarraia denez dentsitateaz ($\rho = M/V$) balia gaitezke:



$$\vec{r}_{MZ} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\Delta m_i$$

$\Delta V \to 0$ limitean hurbilketa zehatza bihurtuko da (integrala!):

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{1}{M}\lim_{\Delta V \to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\Delta m_i$$

$$\boxed{\vec{r}_{MZ} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm}$$

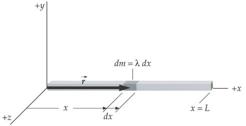
$$x_{MZ} = \frac{1}{M}\int xdm$$

$$y_{MZ} = \frac{1}{M}\int ydm$$

$$z_{MZ} = \frac{1}{M}\int zdm$$

Masa zentroa II: Adibideak

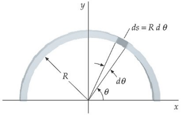
a) Frogatu barra uniforme batez MZ erdian dagoela



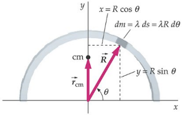
$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx}$$

$$x_{MZ} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = L/2$$

b) Topatu eraztun erdiaren MZ:



(a)



(b)

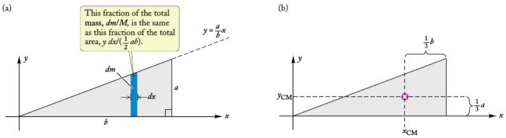
$$\lambda = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R} = \frac{dm}{ds} \quad (S = \theta R \Rightarrow ds = Rd\theta)$$

$$y_{MZ} = \frac{1}{M}\int y dm = \frac{1}{M}\int_0^\pi y\lambda R d\theta =$$

$$= \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}R$$

Masa zentroa II: Adibideak

c) Xafla triangeluarra



$$y = \frac{a}{b}x$$

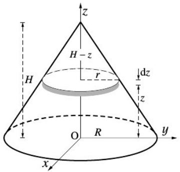
$$\sigma = \frac{M}{\frac{1}{2}ab} = \frac{dm}{ydx}$$

$$dm = \sigma\frac{a}{b}xdx$$

$$x_{MZ} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int_0^b \sigma\frac{a}{b}x^2dx = \frac{\sigma}{M}\frac{ax^3}{b3}|_0^b = \frac{2}{3}b$$

$$y_{MZ} = \frac{1}{M}\int ydm = \frac{1}{3}a$$ frogatu !!!

d) Konoa:

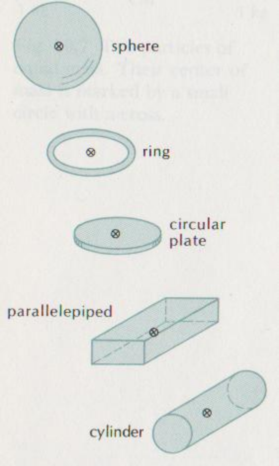


$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-z} \rightarrow r = (R/H)(H-z) \qquad \rho = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2} = \frac{dm}{\pi r^2 dz}$$

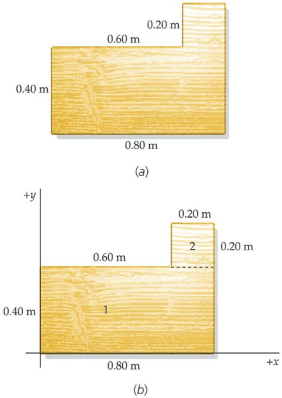
$$z_{MZ} = \frac{1}{M}\int zdm = \int \rho z\pi r^2 dz = \frac{1}{M}\rho\pi\int_0^H \frac{H^2}{R^2}(H-z)^2 zdz = \frac{H}{4}$$

Masa zentroa II: Adibide simetrikoak

Solidoa uniformea eta simetrikoa denean, MZ "erdian" dago:

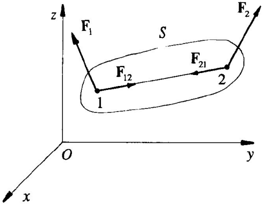


eta hemen?



Momentu angeluarra $\vec{L}$ eta indarren momentua $\vec{\tau}$

2 partikula sistemaren momentu angeluarra kalkulatuko dugu, N partikularen kasua ondorioztatzeko. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2$ kanpo indarrak eta $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ barne).



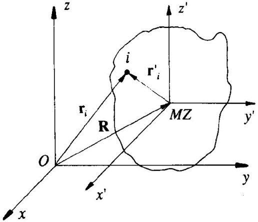
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{\tau}_1 \\ \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{\tau}_2 \end{array}\right\} \frac{d}{dt}(\overbrace{\vec{L}_1 + \vec{L}_2}^{\vec{L}}) = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{\tau}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} \\ \vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \end{array}\right\} (\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cancel{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}}$$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ Kanpo indarrak soilik! $(\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau} = 0 \to \vec{L} = \text{kte})$

Momentu angeluarra $\vec{L}$ eta indarren momentua $\vec{\tau}$



Egia izango da $\vec{L} = \vec{r}_{MZ} \times \vec{P}_{\text{osoa}} = \vec{r}_{MZ} \times M\vec{v}_{MZ}$??? EZ!!

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{MZ} + \vec{r}_i' \text{ eta } \vec{v}_i = \vec{v}_{MZ} + \vec{v}_i'$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}_{MZ} \times M\vec{v}_{MZ} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i' = \vec{r}_{MZ} \times M\vec{v}_{MZ} + \vec{L}'}$$

Partikula sistema baten energia

Energia zinetikoa: energia zinetiko osoa $\rightarrow$ partikula bakoitzaren kontribuzioa geitu beharko da.

$$E_z^{\text{sistema}} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2} m_n v_n^2$$

Galdera: $E_z^{\text{sistema}} = \frac{1}{2} M v_{\text{MZ}}^2$ beteko da??? EZ

E_z^{sistema}, $\vec{v}_{\text{MZ}}$-ren funtzioan idazteko, partikula sistemaren masa zentroari itsatsita erreferentzia sistema bat ipiniko dugu "geldi" dagoen batekiko paraleloki mugitzen dena.($\vec{v} = \vec{v}_{\text{MZ}} + \vec{v}'$)

$$\begin{aligned}
E_z^{\text{sistema}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \cdots \\
&= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_{\text{MZ}} + \vec{v}_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_{\text{MZ}} + \vec{v}_2')^2 + \cdots \\
&= \frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_{\text{MZ}} + v_{\text{MZ}}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 + 2\vec{v}_2' \cdot \vec{v}_{\text{MZ}} + v_{\text{MZ}}^2) + \cdots \\
&= [\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \cdots] + \overbrace{[m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' + \cdots] \cdot \vec{v}_{\text{MZ}}}^{0} \\
&\qquad + \frac{1}{2} [m_1 + m_2 + \cdots] v_{\text{MZ}}^2
\end{aligned}$$

$$E_z^{\text{barne}} \equiv \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_n v_n'^2 \Rightarrow \qquad \boxed{E_z^{\text{sistema}} = E_z^{\text{barne}} + \frac{1}{2} M v_{\text{MZ}}^2}$$

Partikula sistema baten energia

Adibidea: masa bereko (m=1500kg) bi kotxe noranzko berdinean doaz $v_1 = 25\text{m/s}$ eta $v_2 = 15\text{m/s}$-ko abiadurarekin hurrenez hurren. Kalkulatu 2 partikuladun sistema honen energia zinetikoa.

$$E_z^{\text{sistema}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = 9.7\text{x}10^4\,\text{J}$$

Orain MZ-tik: $v_{MZ} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 20\,\frac{m}{s}$

$v_1' = v_1 - v_{MZ} = 25 - 20 = 5\,\frac{m}{s}$

$v_2' = v_2 - v_{MZ} = 15 - 20 = -5\,\frac{m}{s}$

$$E_z^{\text{sistema}} = \frac{1}{2}Mv_{MZ}^2 + \overbrace{\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2}^{E_z^{\text{barne}}} = 9.7\text{x}10^4\,\text{J}$$

N partikuladun sistema baten energia zinetikoa kalkulatzen dakigunez, suposatu sistemarengan kanpo eta barne indar anitz eragiten dutela. Frogapen barik baieztatuko dugu hurrengoa:

$$W_{\text{kanpo}}^{\text{erres}} + W_{\text{barne}}^{\text{erres}} = E_{z,B}^{\text{sist}} - E_{z,A}^{\text{sist}}$$

Energia potenzial grabitatorioa:

$$\begin{aligned} E_p &= m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \cdots + m_n g z_z \\ &= (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n) g \end{aligned}$$

$$\boxed{E_p = M g z_{\text{MZ}}}$$