4. Gaia: Lana eta Energia

Tipler eta Mosca:	6 eta 7 kapituluak
Fisika Orokorra:	6 kapitulua
Ohanian:	7 kapitulua

Aritz Leonardo

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Sarrera

Fisikan funtsezkoa da magnitude fisiko egokiak definitzea, hau da, prozesu fisiko baten zehar (talka bat, estanda bat, erreakzio bat, prozesu mekaniko bat..) kontserbatzen direnak
$\Rightarrow$ $\text{magnitudea}_t = \text{magnitudea}_{t'}$

- Adibide ezagunena, masaren kontserbazioa legea da. Kimikariok, erreaktiboen masa totala berdin mantenduko dela erreakzioa eta gero onartzen duzue.
- Jadanik, mekanikaren esparruan $\vec{L}$ eta $\vec{P}$ ren kontserbazio baldintzak aztertu ditugu eta partikularen higidura aurresateko erabili ditugu.
- Erlazio sakon bat dago simetria eta kontserbazio legeen artean. Magnitude bat konstante mantentzen denean prozesu fisiko batetan zehar zera adierazten du, simetria matematiko bat dagoela prozesu hori deskribatzen duten indar fundamentalen ekuazioetan.

Gai honetan energiaren kontserbazioa aztertuko dugu. Kontserbazio lege hau beste guztien artean garrantzitsuenetarikoa da. Naturaren lege fundamental bat da eta nahiz eta gure ondorioak Newtonen legetik abiatuta lortuko ditugun, guztiz orokorra da. Newton-en legea aplikagarria ez den baldintzatan ere, energia kontserbatuko da beti.

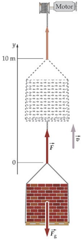
Lana dimentsio bakarrean: F=kte

Kontsidera dezagun partikula bat dimentsio bakarrean mugitzen, adibidez "x" ardatzaren gainean. F_x indar konstante batek eragiten badu honen gainean Δx distantzian zehar, indar honek egiten duen lana partikularen gainean:

$$\boxed{W = F_x \, \Delta x} \qquad 1\text{joule} = 1\text{J} = 1\text{Nm} = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

Definizio intuitiboa da, lan haundia burutuko da partikula bat mugitzeko, itzelezko indarra egin behar denean edota distantzia haundia desplazatu.

- $W > 0 \Rightarrow$ Indarra $\upuparrows$ desplazamendua
- $W < 0 \Rightarrow$ Indarra $\uparrow\downarrow$ desplazamendua



Adibidea: a) Kalkulatu irudiko gruaren motoreak egin beharreko lana m=900kg adreiluak 10m igotzeko, halaber, b) kalkulatu grabitateak egindako lana.

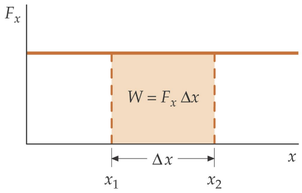
$$v = kte \Rightarrow a = 0 \Rightarrow F_y = F_g = mg$$

$$\text{a)}\, W = F_y \Delta y = (9000\text{N}) \cdot (10\text{m}) = 90000\text{J}$$

$$\text{b)}\, W = F_g \Delta y = (-9000\text{N}) \cdot (10\text{m}) = -90000\text{J}$$

Lana dimentsio bakarrean: F$\neq$kte

Nola kalkulatu indar batek egindako lana konstantea ez denean? $F_x = F_x(x)$

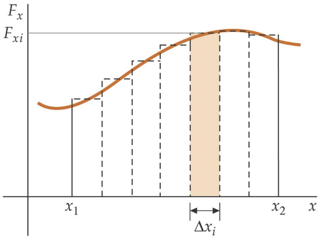


$$\Delta W_i = F_x(x_i)\Delta x$$

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_i = \sum_{i=0}^{n-1} F_x(x_i)\Delta x$$

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0} F_x(x_i)\Delta x \Rightarrow \text{Integrala!!!}$$

Riemann batuketa:

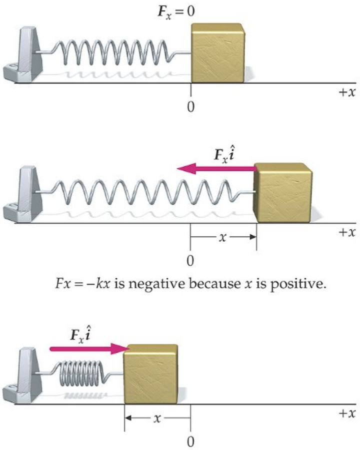


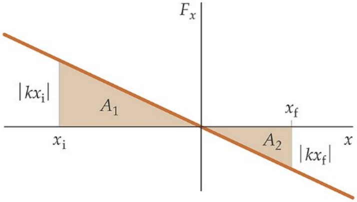
$$\Delta x_i = \frac{x_2 - x_1}{n}$$

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\,dx}$$

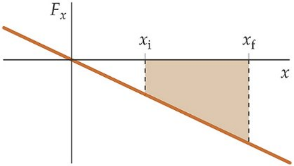
Adibidea: Malguki batek egindako lana $(F_x = -kx)$

$$W_{\text{malgukia}} = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_{x_i}^{x_f} = -k\frac{x_f^2}{2} + k\frac{x_i^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)}$$



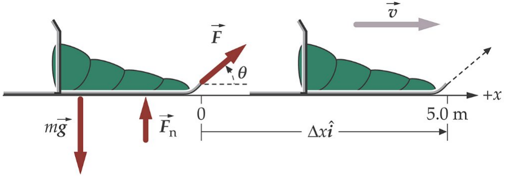


(a)

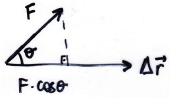


Lana 3 dimentsiotan $\vec{F} = k\vec{te}$

Partikularen gaineko indarra eta berorren desplazamendua ez dute zertan elkar paraleloak izan behar (ikusi trineoa). $\vec{F}$-k egindako lana trineoaren gainean kalkulatzeko bakarrik interesatuko zait indarraren osagaia desplazamenduaren norabidean.

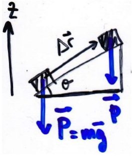


$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath}$



$$\boxed{W = F\Delta r\cos\theta = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}$$

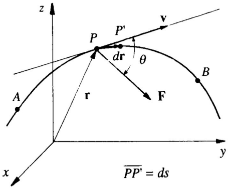
Adibidea: Bloke bat aldapa gora bultzatzerakoan, grabitateak egindako lana blokearen gainean kalkulatu.



$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{k} = k\vec{te} \qquad \Delta\vec{r} = \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}$$
$$W = \vec{P}\cdot\Delta\vec{r} = 0\cdot 0 + 0\cdot\Delta y - mg\Delta z = -mg\Delta z$$

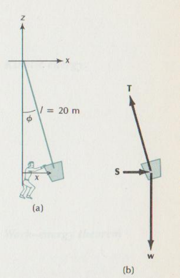
Lana

Indarra eta ibilbidea aldakorrak direnean, $\Delta r \to 0$ egin dezakegu eta batuketa integrala bihurtuko da.



$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

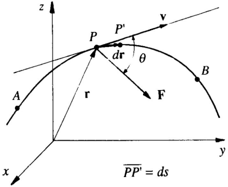
Adibidea: Irudiko langileak poliki bultzatzen du bertikaletik hasita 600 kg-ko kuboa 2 m aldenduz. Kableak l=20m baditu kalkulatu langileak egindako lana.



$$\begin{cases} -T\sin\phi + S = 0 \\ T\cos\phi - mg = 0 \end{cases} \quad S = mg\tan\phi$$

Lana

Kasurik orokorrenean, hots, indarra aldakorra denean eta ibilbidea orokorra, $\Delta r \to 0$ eraman dezakegu eta batuketa integrala bihurtuko da.

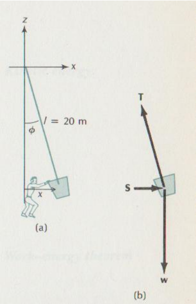


$A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Adibidea: Irudiko langileak poliki bultzatzen du bertikaletik hasita 600 kg-ko kuboa 2 m aldenduz. Kableak l=20m baditu kalkulatu langileak egindako lana.



$$\begin{cases} -T\sin\phi + S = 0 \\ T\cos\phi - mg = 0 \end{cases} \qquad S = mg\tan\phi$$

$$W = \int_A^B Sdx = \int_0^{2m} mg\tan\phi dx$$

$$\begin{cases} \sin\phi = x/l \\ dx = l\cos\phi d\phi \end{cases} \qquad x = 2\text{m}, sin\phi = 2/20, \phi = 0.1\text{rad}$$

$$W = \int_0^{0.1} mg\tan\phi(l\cos\phi d\phi) = mgl\int_0^{0.1} \sin\phi d\phi$$
$$W = mgl[-\cos\phi]_0^{0.1} = mgl[1 - \cos 0.1] = +590J$$
$$W_{\text{grabitateak}} = -mg(-l\cos 0.1 + l) = -590J$$

Energia Zinetikoa

- Demagun partikula ba A-tik B-ra doala eta ibilbidean zehar nabaritzen duen indar erresultantea $\vec{F}$ dela:

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \int_A^B \vec{v} d\vec{v} = m \int_A^B v dv = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_A^B$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_k \equiv \text{Energia zinetikoa}}$$

Lan-Energia teorema

Partikula baten gainean indar askok eragin dezakete, beti ere, indar erresultantea kalkulatzeko gai izango garelarik. Indar erresultante honek egindako lana ibilbide osoan zehar partikularen gainean, bukaeran duen energia zinetikoa ken hasieran duenaren berdina izango da.

Energia Mekanikoa

Demagun partikula baten gainean eragiten duen indar bakarra grabitatea dela.

- Grabitateak egindako lana ibilbidean zehar $\Rightarrow W = -mg(z_B - z_A)$
- Bestalde lan osoa beti da $\Delta E_k \Rightarrow W = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$

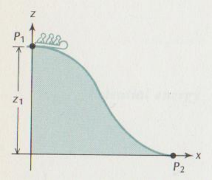
$$\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = -mg(z_B - z_A)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \text{kte}}$$

$$E_k + mgz \equiv \text{Energia mekanikoa}$$

Adibideak:

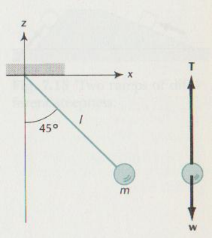
- Bosled talde batek 148m aldapa behera egiten ditu. Zein izango da trineoaren abiadura beheko puntuan?



$$E_{\text{mek}} = \text{kte} \Rightarrow E_1^{\text{mek}} = E_2^{\text{mek}}$$

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = 0 + mgz_1 \\ E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 \end{cases} \quad \frac{1}{2}mv_2^2 = mgz_1 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gz_1}$$

- Pendulua aske utzi da irudiko posiziotik, topatu abiadura eta tentsioa beheko puntutik pasatzen denean.



$$E_{\text{mek}} = \text{kte} \Rightarrow E_1^{\text{mek}} = E_2^{\text{mek}}$$

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = 0 - mgl\cos 45 \\ E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgl \end{cases} \quad \boxed{v_2^2 = 2gl(1 - \cos 45)}$$

T? Newton-en legea aplikatu beheko puntutik pasatzen denean.

$$T - mg = ma_N = m\frac{v_2^2}{l} \Rightarrow T = mg + m\frac{v_2^2}{l} = \boxed{(3 - \sqrt{2}/2)mg}$$

Oharra: Ez al dago N eta T indarren ekarpenik energia kalkulatzerakoan?

INDAR EZ-KONTSERBAKORRAK eta ENERGIA POTENTZIALA

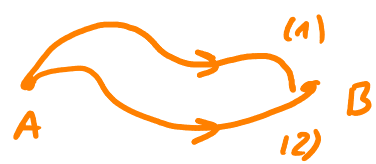
$$W_{TOTALA} = \Delta E_z = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$E_{mek} = \frac{1}{2} m v_A^2 + E_p(x_A, y_A, z_A) \quad \begin{cases} \nearrow mgz_A + c \\ \searrow \frac{1}{2} k x_A^2 + c \end{cases}$$

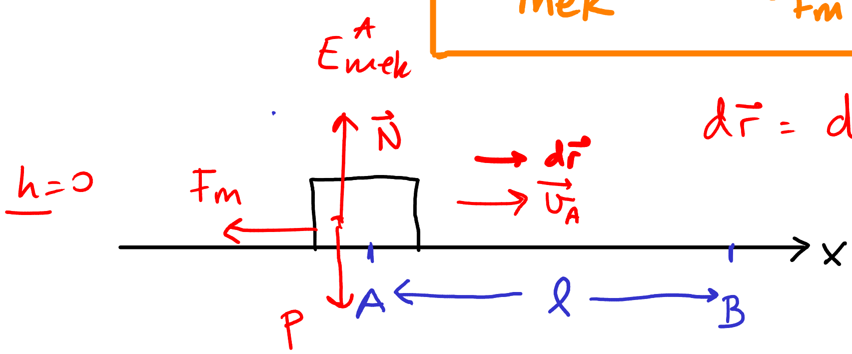
$$\Delta E_p = mg\Delta z$$

Eta ibilbidearen menpekoak diren indarrak daudenean? MARRUSKADURA

$$\boxed{E_{mek}^A + W_{F_m} = E_{mek}^B}$$



$$W_{F_m}^{A \to B} (1), (2)$$

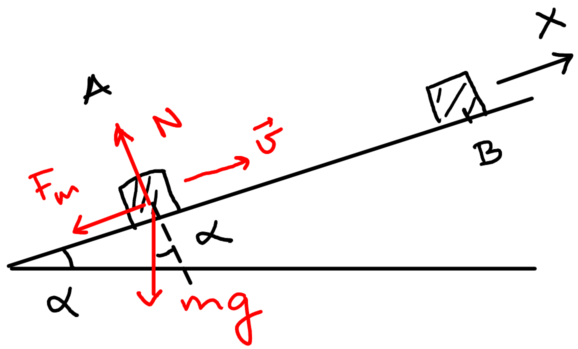


$$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath}$$

$$W_{F_m} = \int_A^B \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\mu mg\,\hat{\imath} \cdot \underline{dx\,\hat{\imath}} = -\mu mg \int_A^B dx$$

$$= -\mu mg \underbrace{(x_B - x_A)}_{\ell}$$

$$\vec{F}_m = \mu N (-\hat{\imath}) = -\mu mg\,\hat{\imath}$$



$$\text{Newton} \begin{cases} N = mg\cos\alpha \quad (*) \\ -F_m = m \cdot a \end{cases}$$

$$\vec{F}_m = -\mu N\,\hat{\imath} = -\mu mg\cos\alpha\,\hat{\imath}$$

$$W_{F_m} = \int_A^B -\mu mg\cos\alpha\,\hat{\imath} \cdot dx\,\hat{\imath}$$

$$= -\mu mg \cos\alpha \cdot \ell$$