2. Gaia: ZINEMATIKA

Tipler eta Mosca:	2 eta 3 kapituluak
Fisika Orokorra:	3 kapitulua

Aritz Leonardo

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Zenbait kontzeptu

- Mekanika: helburua gorputzen higidura aurreikustea da.
  - Zinematika: Higidura deskribatzea honen jatorriaz arduratu gabe.
  - Dinamika: Higidura sortzen duteneko kausak aztertzea $\Rightarrow$ indarrak

Partikula orokor baten posizioa ($\vec{r}$) ezagutu nahi dugu edozein aldiunetan. Baita ere bere abiadura ($\vec{v}$) eta azelerazioa ($\vec{a}$).

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k} \ \ (\mathrm{m})$$
$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k} \ \ (\mathrm{m/s})$$
$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k} \ \ (\mathrm{m/s^2})$$

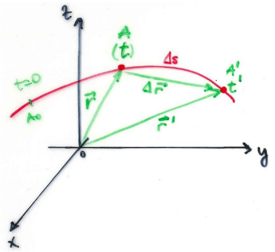
($\vec{r}$),($\vec{v}$) eta ($\vec{a}$) bektoreak aurretiaz aukeratutako erreferentzia sistema bat finkatuz adieraziko ditugu $\Rightarrow$ HIGIDURA FENOMENO ERLATIBO BAT DA.

- Adibidea1: $\vec{r} = \frac{1}{2} t\,\hat{\imath} + t^2 \hat{\jmath}$ bada irudikatu posizio bektorea t=0,1,2,4,8 segunduetan. Lortu ibilbidearen ekuazioa $y(x)$.

- Adibidea2: $\vec{r} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)\hat{\imath} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)\hat{\jmath}$ bada irudikatu ezazu partikularen posizioa lehenengo 2 segunduetarako. Lortu ibilbidearen ekuazioa $y(x)$.

Abiadura

batezbesteko abiadura



$\vec{r}$	A puntuaren posizio bektorea
$\vec{r}'$	A' puntuaren posizio bektorea
$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}' - \vec{r}$	desplazamendu bektorea
$\Delta t \equiv t' - t$	denbora tartea
$\Delta s \Rightarrow$	AA' arkuaren (ibilbidearen) luzera

- <u>Batezbesteko Abiadurak</u>:
  - Eskalarra: $\boxed{\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}}$ $\longleftarrow$ zenbaki bat!
  - Bektoriala: $\boxed{< \vec{v} >= \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$ $\longleftarrow$ bektore bat!

Kontzeptu ezberdinak dira. Zirkularki biraka dabilen partikula batek, lehenengo bueltaren ondoren $\bar{v} = \frac{2\pi R}{\Delta t}$ izango du eta $< \vec{v} >= 0$

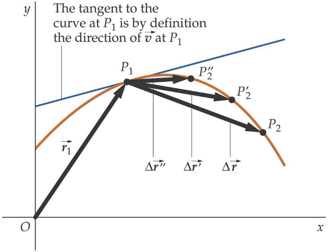
- Partikula baten posizio bektorea $\vec{r} = \frac{1}{2}t\,\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}$ bada kalkulatu batezbesteko abiadura bektorea $t_h = -1$ eta $t_b = 2$ denbora tartean.

- Partikula baten posizio bektorea $\vec{r} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\hat{\imath} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\hat{\jmath}$ bada, kalkulatu batezbesteko abiadura bektorea eta eskalarea $t_h = -1$ eta $t_b = 2$ denbora tartean.

Abiadura

aldiuneko abiadura

Nola definitu dezaket orduan aldiune zehatz bateko partikularen abiadura?



- <u>Aldiuneko Abiadurak</u>:
  - Eskalarra: $\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$
  - Bektoriala: $\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$

$\Delta t \to 0$ doanean hasierako puntua eta bukaerakoa “gainean“ daude, beraz, $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$ eta $\Delta\vec{r}$ ibilbidearekiko tangentea (ukitzailea) izango da.

$$\vec{v} = v \cdot \hat{u}_t = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x(t), y(t), z(t)) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

- Partikula baten posizio bektorea $\vec{r} = \frac{1}{2}t\,\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}$ bada kalkulatu aldiuneko abiadura bektorea eta bere modulua.

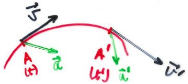
- Partikula baten posizio bektorea $\vec{r} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\hat{\imath} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\hat{\jmath}$ bada, kalkulatu aldiuneko abiadura bektorea eta bere modulua.

Azelerazioa

batezbeste eta aldiuneko azalerazioak

Partikularen abiadura ibilbidean zehar aldakorra izan daiteke, zenbat aldatzen den adierazteko $\rightarrow$ azelerazioa.

- <u>Batezbesteko Azelerazioa</u>: $\boxed{<\vec{a}>=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{\vec{v}'-\vec{v}}{t'-t}}$



- <u>Aldiuneko Azelerazioa</u>: $\boxed{\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}}$ $[a]=\frac{L}{T^2}$

Azelerazioak orokorrean EZ du zertan tangentea izan behar.

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x(t)}{dt}\hat{\imath}+\frac{dv_y(t)}{d}\hat{\jmath}+\frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{\imath}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{\jmath}+\frac{d^2z(t)}{dt^2}\hat{k}$$

$$\vec{a}=a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}$$

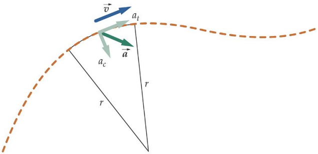
$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

- Adibidea: $\vec{r}=1/2t\hat{\imath}+t^2\hat{\jmath}$ partikula baten posizioa bada, kalkulatu $\vec{a}$ eta $|\vec{a}|$

- Partikula baten posizio bektorea $\vec{r} = \frac{1}{2} t \hat{\imath} + t^2 \hat{\jmath}$ bada kalkulatu aldiuneko azelerazio bektorea eta bere modulua.

- Partikula baten posizio bektorea $\vec{r} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)\hat{\imath} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)\hat{\jmath}$ bada, kalkulatu aldiuneko azelerazio bektorea eta bere modulua.

Batzuetan, komenigarria gerta daiteke azelerazio bektorea idazterakoan, ibilbideak sortzen dituen bektore unitario tangentzial eta normalen gainean deskonposatzea.



- <u>Osagai tangentziala</u>: $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t$
- <u>Osagai normala</u>: $\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\hat{u}_n$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{r}\hat{u}_n}$$

- Adibidea: Partikula baten posizio bektorea $\vec{r} = (2t^2 - 1)\hat{\imath} + (t^3 + 1)\hat{\jmath}$ izanik, kalkulatu:
  a) Hasierako posizio bektorea
  b) Jatorriarekiko distantzia $t = 5$ denean
  c) Abiadura eta azelerazioa bektoreak $t = 5$ denean
  d) Azelerazioaren osagai normala eta tangentziala $t = 5$ denean

Higidura ekuazioak

Zein da natura behatzerakoan lortzen dugun benetazko informazioa?
INDARRAK: grabitatorioa, elektrikoa, malgukiarena...
Newtoni esker jakin badakigu nola indarra edota azelerazioa ezagutzea baliokideak den (F=ma).

$$\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{deribatu}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{deribatu}} \vec{a}(t)$$

$$\vec{r}(t) \xleftarrow{\text{integratu}} \vec{v}(t) \xleftarrow{\text{integratu}} \vec{a}(t)$$

<u>Higidura ekuazioak</u>:

$$1) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow d\vec{v} = \vec{a}dt \rightarrow \int d\vec{v} = \int \vec{a}(t)dt \rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t)dt}$$

$$2) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v}dt \rightarrow \int d\vec{r} = \int \vec{v}(t)dt \rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t)dt}$$

Oharra: Bi ekuazio hauek bektorialak dira, hortaz, osagai guztietarako bete behar dira: $v_x = v_{0x} + \int a_x(t)dt, \; v_y = v_{0y} + \int a_y(t)dt \ldots$

- Adibidea: Partikula baten azelerazio bektorea $\vec{a}(t) = 6t\hat{\imath} - 2\hat{k}$ da. Badakigu $t = 0$ denean $P_0(1, 3, -2)$ puntuan dagoela eta $t = 3$ aldiunean aldiz, bere abiadura $\vec{v}(3) = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ dela. Topatu partikularen abiadura eta posizio bektoreak edozein aldiunerako.

Higidura ekuazioak

kasu partikularra $\rightarrow$ $\vec{a}$ = konstante

Aurreko higidura ekuazioak ebatziko ditugu kasu errazenerako $\rightarrow$ $\vec{a} = \overrightarrow{\text{kte}}$

$$1) \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \int dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t \Rightarrow \vec{v}(t) \text{ daukagu!!}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t}$$

$$2) \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t)dt = \vec{r}_0 + \int [\vec{v}_0 + \vec{a}t]dt$$

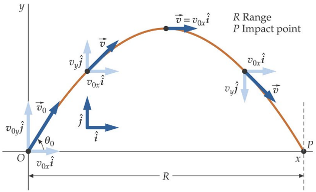
$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

Oharra: Ekuazio bektorialak dira, beraz, osagaiz-osagai bete behar dira !

- Adibidea: Idatzi ekuazioak $\vec{a} = 0$ kasurako eta interpretatu.

Higidura ekuazioak

kasu partikularra $\rightarrow \vec{a} = kte = (0, -g, 0)$ JAURTIKETA PARABOLIKOA



Hasierako baldintzak:

$$\vec{r}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x}\hat{\imath} + \vec{v}_{0y}\hat{\jmath} + \vec{v}_{0z}\hat{k} = v_0 \cos\theta_0\hat{\imath} + v_0 \sin\theta_0\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = kte = (0, -9.8, 0)\mathrm{m/s}^2$$

Azelererazioa konstantea denez, higidura ekuazioak ebatzita ditugu.

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

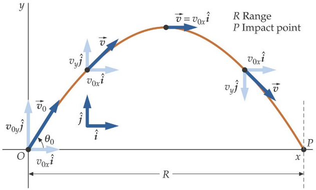
$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

- Adibidea: Lortu jaurtiketa parabolikoaren kasuan ibilbidearen ekuazioa:

$$\boxed{y = x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}}$$

Higidura ekuazioak

kasu partikularra $\rightarrow \vec{a} = kte = (0, -g, 0)$ JAURTIKETA PARABOLIKOA II



- Hasierako Baldintzak:

$$\vec{r}_0 = \vec{0} \quad \vec{v}_0 = (v_0 \cos\theta_0, v_0 \sin\theta_0) \quad \vec{a} = (0, -9.8)$$

- Higidura ekuazioak:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Orain ekuazioei eskakizun partikularrak egingo dizkiegu informazioa ateratzeko.

- Altuera maximoa $\Rightarrow v_y = 0$

$$\begin{cases} h = v_{0y}t_A - \frac{1}{2}gt_A^2 \\ 0 = v_{0y} - gt_A \end{cases} \quad t_A = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \Rightarrow \boxed{h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g}}$$

Higidura ekuazioak

kasu partikularra $\rightarrow \vec{a} = kte = (0, -g, 0)$ JAURTIKETA PARABOLIKOA III

- Irismena $y = 0$

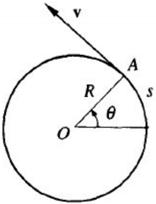
$$0 = v_{0y} t_B - \frac{1}{2} g t_B^2 \Rightarrow t_B = \begin{cases} 0 & \text{noski, jatorria!} \\ \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \end{cases}$$

$$x = v_{0x} t_B \Rightarrow \boxed{R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}}$$

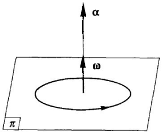
Zein angelurako izango da Irismena maximoa? $\frac{dR}{d\theta} = 0$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2v_0}{R} \cos 2\theta = 0 \rightarrow 2\theta = \pi/2 \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

Higidura zirkularra



$$\boxed{\theta(t) = \frac{s(t)}{R} \text{ rad}}$$



- Batezbesteko abiadura $\overline{\omega}$ eta azelerazio $\overline{\alpha}$ angeluarrak.
  $\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $(\frac{\text{rad}}{s})$ eta $\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ $(\frac{\text{rad}}{s^2})$
- Aldiuneko abiadura $\vec{\omega}$ eta azelerazio $\vec{\alpha}$ angeluarrak.

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n} \quad (\frac{\text{rad}}{\text{s}})$$
$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\omega}{dt}\hat{n} \quad (\frac{\text{rad}}{\text{s}^2})$$

- Higidura ekuazioak ibilbide zirkularrerako:

$$\theta(t) \xrightarrow{\text{deribatu}} \omega(t) \xrightarrow{\text{deribatu}} \alpha(t)$$
$$\theta(t) \xleftarrow{\text{integratu}} \omega(t) \xleftarrow{\text{integratu}} \alpha(t)$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \int \alpha(t)dt} \qquad \boxed{\theta = \theta_0 + \int \omega(t)dt}$$

Higidura zirkularra II

Kasu partikularra α=kte:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha \int dt = \boxed{\omega_0 + \alpha t}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int [\omega_0 + \alpha t] dt = \boxed{\theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

Kasu sinpleenean $\alpha = \text{kte} = 0 \;\; \Rightarrow \omega(t) = \omega_0$ eta $\theta = \theta_0 + \omega_0 t$

- Periodoa (T): Bira oso bat burutzeko behar den denbora $2\pi = \omega T$
- Maiztasuna (f): Segunduko zenbat bira eman dituen $f = \frac{1}{T}$

Zeintzuk dira v, ω, a eta α-ren arteko erlazioak?

$$1) \;\; |\vec{v}| = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(R \cdot \theta(t))}{dt} = R \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = R \cdot \omega \Rightarrow \boxed{v = R\omega}$$

$$2) \;\; a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R \cdot \omega(t))}{dt} = R \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = R \cdot \alpha \Rightarrow \boxed{a_T = R\alpha}$$